Title	Vector lattice ノ表現ニツイテ
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 233 p.825-p.834
Issue Date	1942-03-18
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74944
rights	
Note	

1014. Vector lattice ノ表現ニツイテ

中山　正（阪大）

Vector lattice 或ヒハ更ニ一般ニ可換束群ノ表現ニツイテハ純代数的ニハ非常ニ満足スベキ結果ガ Lorenzen（ソシテソノヨリ判リ易イ解説トシテ Clifford）ニヨッテ得ラレテヰル（ソノコトハ 227 号談話 983 及ビ 984 ニモ一寸述ベタ[1]）．（勿論純代数的ニモ多少ノ問題ガ残サレテヰルガ）．ソシテソノ結果ヲ使フト Vector lattice ノ諸結果，特ニソノ表現ニツイテノ諸定理ニ於テソノ証明ガ簡易化サレルモノガ少クナイ様ニ思ハレル。

サテ、前々号ニ前田一小笠原氏ノ興味アル諸談話ガ出タ（談話 998―1000）．ソノ第一ノ表現論（998）ソレハあるきめです的ノ時ニハ中野氏ノ relatives Spectrum（数物記事 23―7（昨年））ト大体同ジモノニナルノデハナイカト思ハレマスガ、兎ニ角ソレ等ヲ上述ノ立場カラ見テ見タイト思フ。（本質的ニ大シタ違ヒハナイガ）即チ、一般ノ Vector-lattice ガ Krull-Lorenzen-Clifford ニヨッテ線形順序ヲモツモノデ同型ニ常ニ表現サレテヰルノ

---

1) 談話 984 ニオケル distributivity ニツイテハ中野氏カラ適切ナ御注意（談話 995）ヲイタゞキ難有ウ存ジマス．自分デモ気ヅイテ談話 989 デ述ベテオキマシタ、紙上オ礼申シマス．ナホ Dedekind ノ証明ハ Werke ノ Bd. 2, XXVIII §6 ニアリマス。

ノダカラ、ソレニ直接 Wallman 式ヲ適用スレバ、同型ヲ犠牲ニシナイデ、兎モ角常ニアル意味デ連続ナアル意味ノ函数(?)デ表現サレルワケデアル。ソノ後ニ特ニ函数ノトル値ヲ実数(又ハ±∞)トシテ、ソノ代リ同型ヲ犠牲ニシテ準同型ニスレバ前田—小笠原氏ノ結果ニ相当スル表現が得ラレルト思フ、ソシテ σ-complete ノ時ハ中野氏ノ relative spectrum ニナルト思フ。而シテソレヲノ結果ヲ直接出サウト思フ時デモ Lorenzen-Clifford ノ表現ヲ経ルコトハ無駄ナ detour デハナイト思フ。兎ニ角、べくとる束ノ所謂表現論ニオイテ、スベテノ表現ノ母型又ハ原型トシテ Lorenzen-Clifford ノ定理ヲ見ルベキナノデハナカラウカト思フノデスが如何デセウカ?!

ナホ、序デニ談話 999 ニ於テ小笠原氏ノ述ベテ居ラレル定理「あるきめです的ナラ完備化出来ル」ハ其ノ後ニモ述ベラレテアル如ク中野氏ノ上記刊物記事及ビ談話 915 ニアリマスが、Lorenzen, Clifford ニヨッテモ証明サレテヰル(例ヘバ Clifford, 定理 3)(Artin-Krull ノ定理ノ analogy)コトヲ述ベサセテイタダク。

§1. 線型順序ヲモツべくとる束ニツイテ自明だが一言スル。線型順序ヲモツべくとる束 L ノ元 a, b ニ於テ任意ノ自然数 n ニ対シテ $|a| < n|b|$ ナルトキ $a \ll b$ デ表ハシ b ノ位(無限大ノ位)ハ a ヨリ高イトデモ云フコトニスル。$a \ll b$ デモ $a \gg b$ デモナイトキ a ト b ハ同ジ位ヲモットイフ。コノ時ニハ $a=b=0$ デナイトスレバ $b-\varepsilon a \ll a$

(及ビ b) ナル實數 $\xi(\neq 0)$ ガ存在シマタ一意的ニキマル. 今 $a>0$ ヲ固定シ, a ヨリ高イ位ノ b ニツイテハ $b \gtrless 0$ ニ應ジテ $\beta=\pm\infty$, a ト同ジ位ノ b ニツイテハ $\beta=$ 上記ノ ξ, a ヨリ低イ位ノ b ニハ $\beta=0$ トスレバ, $b\to\beta$ ニヨッテ L カラ實數及ビ $\pm\infty$ ヘノ對應ガツケラレル. 算法ノ順序ガ保存サレル (但シ $\infty-\infty$ 等ニツイテハ何モワカラヌトシテ) 嚴密ノ意味デハイケナイガ、カヽル對應ヲモ準同型トヨビ實數 (又 $\pm\infty$) ニヨリ表現ト呼バウ (前田―小笠原氏ノ場合ト同樣).

ナホ、カヽル analysis ヲクハシク遂行シテ Hahn ハ線型順序ヲモツ vector lattice 或ヒハ一般ニ可換束群ノ形ヲ完全ニキメテ居ルワケダガ、ソノ精細ハ必要トシナイ。

§2. 先ヅ Lorenzen-Clifford ノ定理: L ヲ一ツノ vector lattice トスル (可換束群モ同樣ニ扱ヘルガ、簡單ノタメニ)。

$x>0$ ナル元、即チ正元ノアル集合 $\mathfrak{N}$ デ束 L ノ双對 (＝加法的) いでやる ナルモノヲ <u>t-いでやる</u> トヨブ (Lorenzen ノ言葉ソノマヽデハ properly = ganz ナ t-いでやる トイフベキダガ簡單ノタメソレヲ略ス)。t-いでやる $\mathfrak{P}$ ニオイテ $a\notin\mathfrak{P}$, $b\notin\mathfrak{P} \to a+b\notin\mathfrak{P}$ ナルトキ $\mathfrak{P}$ ハ素ナリトイフ. 最大 t-いでやるハ素デアル。

$\mathfrak{P}$ ガ素ナル t-いでやる ナルトキ, $|x|\in\mathfrak{P}$ ナル元, 即チ

$$x=a-c \quad (a \text{ モ } c \text{ モ } \geqq 0 \text{ デ且ツ } \notin\mathfrak{P})$$

ナル元 x ノ全体ヲ $M_{\mathfrak{z}}$ トスル。$M_{\mathfrak{z}}$ ハ Birkhoff ノ言葉デイヘバ normal ナ subspace ヲナシ，而モ $L/M_{\mathfrak{z}}$ ナル剰余 vector lattice ハ線形順序ヲモツ。L ノ元 a ノ $L/M_{\mathfrak{z}}$ ニオケル像、即チ $a \bmod M_{\mathfrak{z}}$ ノ類ヲ $a(\mathfrak{z})$ デ表ハス。

今 $\mathfrak{z}$ ガ最大 l-いでやるノ全体ヲウゴクトスレバ

$$a \longrightarrow (\cdots\cdots, a(\mathfrak{z}), \cdots\cdots)$$

ニヨッテ L ガ線形順序ベクトル束 $L/M_{\mathfrak{z}}$ ノ直積ノ中ヘ tran., 即チ同型ニ表現サレル。

§3. カク Lorenzen-Clifford ノ定理ハ L ノ最大 l-いでやる全体 Ω ニ於ケル或ル意味ノ函数（各点デ値ノ属スル Bereich ガコトナリ、マタソレハ単ニ線形ベクトル束デアッテ数デナイ）ニヨリ L ノ同型ノ表現ヲ主張スル。ソコデ Ω ニ適当ニ位相ヲ入レル。Wallman ノ真似ヲスル。

L ニオケル $\geqq 0$ ナル元ノナス部分束ニ於ケル Wallman ノ maximal collection ガ上記最大 l-いでやるニ他ナラナイノダカラ，$a \geqq 0$ ナル a ニツイテ $a \in \mathfrak{z}$ ナル最大 l-いでやる $\mathfrak{z}$ ノ集合、所謂 a-set ヲ開集合ノ基トスレバソレハ同時ニ閉トナリ Ω ガ完全不連結ナ位相空間ニナル。

コノトキ上記 $a(\mathfrak{z})$ ハ次ノ如キ意味デ連続ナ函数（?）デアル、ソノ第一ノ意味：一元 a，一点 $\mathfrak{z}$ ニ対シ、第二ノ元 b ニツイテ $a(\mathfrak{z}) = b(\mathfrak{z})$ ナリトスレバ $\mathfrak{z}$ ノ適当ナ近傍 U ヲトレバ $q \in U \longrightarrow a(q) = b(q)$ デアル。

〔証明〕 $a \leqq b$ ノ時ニヤレバヨイ。$(a-b)(\mathfrak{p})=0$ ダカラ $a-b \in \mathfrak{p}$. 然ルニ $\mathfrak{p}$ ハ最大 l-いでやるダカラ $(a-b)\frown p=0$ ナル $p \in \mathfrak{p}$ ガアル. コノ p-set U ヲ考ヘレバ $U \ni \mathfrak{p}$ デアリ、$U \in \mathfrak{q}$ 即チ $p \in \mathfrak{q}$ ナラ $(a-b)\frown p=0$ ダカラ $a-b \in \mathfrak{q}$. 故ニ $(a-b)(\mathfrak{q})=0$ デアル. 連續ノ第二ノ意味: 任意ノ $u>0$ (>0 ナルコトハ特ニ本質的デハナイ) ヲトリ、$a(\mathfrak{p}) \gg u(\mathfrak{p})$ ノ時ニハ $\alpha(\mathfrak{p})$ ヲ $a \gtrless 0$ ニ應ジテ $\pm\infty$ トシ, 然ラデナイトキニハ $a(\mathfrak{p}) - \alpha(\mathfrak{p})\,u(\mathfrak{p}) \ll u(\mathfrak{p})$ ナル實數 $\alpha(\mathfrak{p})$ ヲ考ヘル (§1. 參照). シカラバコノ $\alpha(\mathfrak{p})$ ハ連續函數デアル.

〔証明〕 $\alpha(\mathfrak{p})=\alpha_0$ ガ有限ノ時ニハ

$$\{((\alpha_0+\varepsilon)u-a)\cup 0\}\text{-set} \quad ト$$
$$\{(a-(\lambda_0-\varepsilon)u)\cup 0\}\text{-set}$$

ノ共通集合ヲ考ヘレバヨイ. ソコデ $\mathfrak{q}$ ニ対スル $\alpha(\mathfrak{q})$ ハ $\alpha_0+\varepsilon$ ト $\alpha_0-\varepsilon$ ノ間ニアル. $\alpha(\mathfrak{p})=+\infty$ ノトキニハ任意ノ實數 λ ニ對シテ $\{(\lambda u-a)\cup 0\}$-set ノ補集合ナル開集合ヲ考ヘレバヨイ $\alpha(\mathfrak{p})=-\infty$ ノトキモ同様。

函數ト云フノハ無理ナ変ナ函數デアリ、ムシロ唯表現トイフベキダガ、或ル意味デ連続デアリ、トモカク同型デアルノガ長所デアラウ。

§3. 上記第二ノ連續性ニ於ケル u ヲ或ルーツノ固定シタ元トスレバ、$a \longrightarrow \alpha(\mathfrak{p})$ ニヨッテ Ω ニ於ケル實數(又ハ $\pm\infty$)値連續函數 $\alpha(\mathfrak{p})$ ニヨッテ L ガ準同型(例ノ如ク modify シタ意味)ニ表現サレタコトニナル、同型

性ヲ纖性ニシテ實數（又ハ±∞）値ニシタワケデアル。

特ニLニ（Freudenthal式）單位eガアルトシテ$u=e$トスレバ前田―小笠原氏ノ§1ノ結果（定理1,2）ニナルワケデアラウ。（實際上記Ωノ点ト前田―小笠原氏ノΩノ点ト對應ヅケラレルコトハ容易ニワカル）。（ナホ言葉ニ拘ハル樣デ恐縮デスガ、定理1.3ニオイテL/N=isomorphicト言ハレテアルノハ言葉ガ一寸不適當デ誤解ヲ招グ恐レガアルノデハナイデセウカ？ソコニモ述ベラレテアル如ク單ニKernガ0トイフ意味デ一對一トハ限ラナイワケデスカラ。妄言才免シ下サイ）。あるきめです的ナラ0函數ニ對應スルノハ0元ノミノコト明カ．ナホあるきめです的ノ場合ノ精細ハ次§ニ述ベヨウ。

σ-completeナラ中野氏ノrelatives Spektrumニナルワケデアラウ。ナホ、ソノ場合Ωガ局所びこむぱくとナルコト（中野氏ノSatz. 1.5）（實ハ局所トイフヨリハ幾分強イびこむぱくと性デアル）モ中野氏ニ於ケル如クprojectionノ可補性カラWallmanノモウ一ツノ位相トノ一致カラワカルワケデアルが、ソレハ多分ソレニ本質的ニ依存スルコトデ、一般ノべくとる束デハΩハ局所びこむぱくとニナルト限ラナイデハナイカト思ハレルが、トモカク吟味シテ見ナケレバ分ラナイ。

§4．次ニ前田―小笠原氏ノ§2ニ相當シテあるきめで

ナ的ノ場合ヲ考ヘヨウ。L があるきめですナ的トハ上記§2ニ於ケル（或ヒハ一般ニ任意ノ線型順序ベくとる束ニヨル）同型表現デ，L ノ如何ナル二元 a, b（$\neq 0$）ヲトッテモ、スベテノ $\mathfrak{z}$ ニ対シテ $a(\mathfrak{z}) = b(\mathfrak{z}) = 0$ カ $a(\mathfrak{z}) \gg b(\mathfrak{z})$ トナッテ居ルトイフ様ナコトガナイコトデアル。

以下 L があるきめですナ的ナリトスル．前田，小笠原氏ノ定理2.2ノ証明ノ精細ハ略サレテアルが、大体Freudenthal 単位ノアル場合ノ直積ニナホス（大ザッパナ言ヒ方ダが）トイフ方法ハオ借リシテ（Bochner-Phillips, Ann. Math. 42 ヲモ参照）、ヤハリ Krull-Lorenzen-Clifford ノ定理カラ幾分簡易化サレルノデハナイカト思フ。

互ニ fremd（meet が 0）ナル正元ノ集合トシテ最大ノモノが確カニ存在スル、ソノ一ツヲ $\{e_\alpha\}$ トスル．最大 t-いでやる，即チ Ω ノ点 $\mathfrak{z}$ ノ中ニハスベテノ e_α ニ對シテ $e_\alpha(\mathfrak{z}) = 0$ トナルモノモアルカモ知レナイ．今ソレヲヲ除イテシマッテ残リヲ Ω_1 トスル．然ラバ§2ニ於ケル表現ニ於テ單ニ $\mathfrak{z}$ が Ω_1 ヲウゴクトシテモ表現が同型デアルコトハ保タレル。何トナレバ $a \geqq 0$ デスベテノ $\mathfrak{z} \in \Omega_1$ ニ對シテ $a(\mathfrak{z}) = 0$ ナラバ明カニスベテノ e_α ニ對シテ $e_\alpha \frown a = 0$．$\{e_\alpha\}$ ノ最大性カラ $a = 0$.

ソコデ§2ニ於ケル第二ノ連続性ニ於ケル $\mathfrak{U}$ トシテ点 $\mathfrak{z}$ ニ於テ $e_\sigma(\mathfrak{z}) > 0$ ナル e_σ（ソレハタダ一ツシカナイ）ヲトル、即チ各点 $\mathfrak{z}$ ニ於テ $e_\sigma(\mathfrak{z}) > 0$ ナル e_σ ヲトリ、$L/M_{\mathfrak{z}}$

ニオケル $e_\mathfrak{z}$ ノ位ニ注目シテ $a(\mathfrak{z}) \gg e_\sigma(\mathfrak{z})$ ナラ $a \gtrless 0$ ニ應ジテ $\alpha(\mathfrak{z}) = \pm\infty$, 然ウデナケレバ

$$a(\mathfrak{z}) - \alpha(\mathfrak{z})\, e_\sigma(\mathfrak{z}) \ll e_\sigma(\mathfrak{z})$$

トスル、コレニヨッテ

$$a \longrightarrow \alpha(\mathfrak{z}) \qquad (\mathfrak{z} \in \Omega_1)$$

ナル Ω_1 デノ実数（又ハ $\pm\infty$）値函数 $\alpha(\mathfrak{z})$ ニヨッテ L ガ準同型ニ表現サレタ、コノ $\alpha(\mathfrak{z})$ ハ連続デアル 何者：各 e_σ-set ハ互ニ fremd ナ開且ツ閉集合デソノ和ガ Ω_1 ダカラ各 e_σ-set ノ中デ連續ナコトヲイヘバヨイ。然ルニソレハ §3 ニ述ベタ場合デアル。（ココマデハあるきめです的ノ假定ハ使ッテヰナイ）、次ニ常ニ $\alpha(\mathfrak{z}) = 0$ ナル元 a ハ 0 ニカギル。証明ハ $a \geqq 0$ ノトキスレバヨイ。ソノ様ナ a ニツキ任意ノ e_σ ニ對シテ $b = a \frown e_\sigma$ トオケバ明カニ任意ノ $\mathfrak{z} \in \Omega_1$ ニ対シテ $b(\mathfrak{z}) = e_\sigma(\mathfrak{z}) = 0$ カ $b(\mathfrak{z}) \ll e_\sigma(\mathfrak{z})$ デアル。故ニ（あるきめです假定ニヨリ）$b = 0$. スベテノ e_σ ニツイテダカラ $a = 0$ デアル。

更ニ、任意ノ a ニツキ $\alpha(\mathfrak{z}) = \pm\infty$ ナル点ハ nowhere dense デアル. 証明ハ $a > 0$ トシテヨイ。如何ナル $b > 0$ ニ対シテモ b-set 中ニハ $\alpha(\mathfrak{z}) =$ 有限ナル $\mathfrak{z}(\in \Omega_1)$ ガアルコトヲイヘバヨイ、即チ $b(\mathfrak{z}) > 0$ デ且ツ $e_\sigma(\mathfrak{z}) > 0$ ナル e_σ ニ對シテ $a(\mathfrak{z}) \gg e_\sigma(\mathfrak{z})$ デナイヤウナ $\mathfrak{z}$ ノアル事デアル、假ニコノ様ナ $\mathfrak{z}$ ガナケレバ任意ノ e_σ ニ対シテ $b \frown e_\sigma$ ヲ考ヘレバ如何ナル $\mathfrak{z}$ ニ対シテモ $(b \frown e_\sigma)(\mathfrak{z}) = 0$ カ $(b \frown e_\sigma)(\mathfrak{z}) \ll a(\mathfrak{z})$ デアル、然ラバ（あるきめです

假定ニヨリ）$b \frown e_\sigma = 0$．任意ノe_σニ対シテダカラ$b=0$トナッテ矛盾。

上記二ツノコトニヨッテ我々ノ表現ハ同型デアル。

カクテ完全不連結ナΩ_1デノ連續実数（又ハ$\pm\infty$）値函數デ同型ニ表現サレタ。

更ニ前田－小笠原氏ノ場合ニ於ケル如クびこむぱくとヲノゾム時ニハ、例ヘバWallman式ニヨリΩ_1ヲびこむぱくとナΩ_2ニinbedスレバヨイデアラウ。Ω_2モヤハリ完全不連結デアル．Ω_2ノ点$\mathfrak{p}$ハΩ_1ノ閉集合ノlatticeノ最大双對いでやるデアル．Lノ元$a \geqq 0$ニ対シテa-set $\in \mathfrak{p}$ナラバ$a(\mathfrak{p})>0$，a-set $\notin \mathfrak{p}$ナラ$a(\mathfrak{p})=0$トオクコトニヨッテ，Lノ元a＝Ω_2デノ連續（實数又ハ$\pm\infty$値）函数ガ得ラレ．ソレガΩ_1（$\subseteq \Omega_2$）ノ上デハ原ノトー致シ同ジ様ナ性質ヲモツコトハ容易ニ知ラレルデアラウト思フ。

以上本質的ニハ何等変リナク、タヾ同ジコトヲ繰リカヘシタヾケデアリ、ソシテ長々ト書イテ恐縮デシタガ、タヾKrull－Lorenzen－Cliffordニヨッテ同型ナ表現ガ與ヘラレテヰルノデスカラ、vector latticeノ諸表現論ニオイテソレヲ原型トシテソレニ依存スルナラ種々ノ点デ簡易化サレルコトガアルノデハナカラウカト思フコトヲ述ベタカッタダケデアリマス。（タヾシコヽニ表現論トイッタノハ無限個ノ元ノsup，infニ関係セズformulate出来ルモノノミトシマス、無限個ノsup, inf等ノ出来

ル迄ノ（例ヘバ spektral zerlegung 等）デハ同定理ガ必ズシモ有効ニ利用出来ルトハ限ラナイカト思ヒマス、利用出来ルコトモアリマセウガ））何カ考ヘ違ヒシテヰル点モアルカト思ヒマス、御教示ヲ願ヒマス。